Wiskunde 3, deeltentamen B
11 april 2016, 13:30-16:30

- Schakel je mobiele telefoon uit en berg hem op.
- Schrijf op ieder vel je naam, studentnummer, en email-adres. Als het tentamen nagekeken is, krijg je een email met het resultaat.
- Laat bij iedere opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.
- Gebruik van het dictaat en van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan. Gewone rekenmachines zijn wel toegestaan.
- Stel je komt niet uit (deel)opgave A, en je hebt dit antwoord nodig voor een volgende (deel)opgave B. Dan kun je het antwoord op A vragen. Schrijf *eerst* je antwoord op A op een apart vel. Vraag *vervolgens* het antwoord op A, waarbij je het aparte vel inlevert. Er is geen puntenaftrek, maar je mag daarna natuurlijk je antwoord op A niet meer veranderen.

Opgave 1. De 2π-periodieke functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(x) = e^{|x|} - e^{\pi}$ voor $-\pi \leq x < \pi$.

a) Schets de grafiek van f (minstens 2 perioden).

b) Bepaal de Fouriercoëfficiënten c_k van f.

c) Wat is $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{3\pi i k}$?

Opgave 2. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt gegeven door $f(x) = \sin(x)$ voor $0 \leq x \leq \pi$, en door $f(x) = 0$ als $x < 0$ of $x > \pi$.

a) Schets de grafiek van f.

b) Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f(\omega)$ van f.

c) Hoe luidt de Fourier inversieformule voor $x = \frac{\pi}{2}$? Gebruik dit om de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2})}{1-\omega^2} d\omega$ uit te rekenen.

Opgave 3. De harmonische oscillator wordt beschreven door de gekoppelde differentiaalvergelijkingen

$$\tfrac{d}{dt}x(t) = \tfrac{1}{m}p(t) \quad \text{en} \quad \tfrac{d}{dt}p(t) = -kx(t)\,,$$

met reële beginvoorwaarden x_0 en p_0. In deze vergelijking is m de massa van het deeltje, en k de veerconstante.

a) Schrijf dit als
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$
voor een 2×2-matrix A.

b) Voor welke waarden van m en k is de lineaire operator $H\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ met $H(\vec{v}) = iA \cdot \vec{v}$ hermitisch voor het standaard inproduct op $\mathbb{C}^2$?

c) Leg uit waarom de baan van $(x(t), p(t))$ in dit geval cirkelvormig is.

Z.O.Z.

Opgave 4. We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_t(x) - f_t(x) \tag{1}$$

voor absoluut integreerbare functies $f_t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, met beginvoorwaarde $f_0(x)$.

a) Als de Fouriergetransformeerde van de beginvoorwaarde $f_0(x)$ gelijk is aan $\mathcal{F}f_0(\omega)$, wat is dan de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f_t(\omega)$ van de oplossing $f_t(x)$?

b) Stel dat de integraal $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)dx$ van de beginvoorwaarde $f_0(x)$ gelijk is aan 1. Wat is dan de integraal $I_t = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)dx$ van de oplossing $f_t(x)$? (Hint: gebruik opgave a voor $\omega = 0$.)

c) Geef de oplossing $f_t(x)$ van (1) met beginvoorwaarde

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} .$$

Einde