Wiskunde 3, deeltentamen A
7 maart 2016, 13:30-16:30

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Laat bij iedere opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.
- Schakel je mobiele telefoon uit en berg hem op.
- Gebruik van het dictaat en van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan. Gewone rekenmachines zijn wel toegestaan.
- Stel je komt niet uit (deel)opgave A, en je hebt dit antwoord nodig voor een volgende (deel)opgave B. Dan kun je het antwoord op A vragen. Schrijf *eerst* je antwoord op A op een apart vel. Vraag *vervolgens* het antwoord op A, waarbij je het aparte vel inlevert. Er is geen puntenaftrek, maar je mag daarna natuurlijk je antwoord op A niet meer veranderen.

Opgave 1. De vectoren $\vec{v}$ en $\vec{v}'$ in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door $\vec{v} = (1,0,1)$ en $\vec{v}' = (0,1,1)$.

a) Bereken de lengtes $\|\vec{v}\|$ en $\|\vec{v}'\|$ van beide vectoren, en geef de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{v}'$.

b) Laat zien dat $W = \{a\vec{v} + b\vec{v}' \,;\, a, b \text{ in } \mathbb{R}\}$ een deelvectorruimte van $\mathbb{R}^3$ is.

c) De vectoren $\vec{b}_0 = \vec{v}$ en $\vec{b}_1 = \vec{v}'$ vormen een basis van W. Geef een *orthogonale* basis van W.

d) Geef de projectie van de vector $(0,0,3)$ op de deelvectorruimte W.

Opgave 2. We werken in de vectorruimte $\mathcal{L}^2([0,1])$ van kwadratisch integreerbare functies op het interval $[0,1]$. Het inproduct is $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx$.

a) De functies $b_0(x) = \sqrt{x}$ en $b_1(x) = x\sqrt{x}$ vormen een basis van de deelvectorruimte $W = \{\alpha b_0 + \beta b_1 \,;\, \alpha, \beta \text{ in } \mathbb{C}\}$ van $\mathcal{L}^2([0,1])$. Geef een *orthogonale* basis b_0', b_1' van W.

b) Bereken de lengtes $\|b_0'\|$ en $\|b_1'\|$ van je orthogonale basisvectoren.

Z.O.Z.

Opgave 3. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met periode 2π is gegeven door $f(x) = 0$ voor $-\pi < x < 0$ en $f(x) = 1$ voor $0 \leq x \leq \pi$.

a) Schets de grafiek van f. (Minstens twee perioden.)

b) Bepaal de coëfficiënten a_0, a_k, en b_k in de Fourierpolynomen

$$p_N(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx)$$

van f.

c) Wat is $\lim_{N\to\infty} p_N(x)$ voor $x = 0$?

Opgave 4. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met periode 2π is gegeven door $f(x) = e^{|x|}$ voor $-\pi \leq x < \pi$.

a) Schets de grafiek van f. (Minstens twee perioden.)

b) Bereken de Fouriercoëfficiënten c_k in de Fourierpolynomen

$$p_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

van f.

c) Geef het eerstegraads Fourierpolynoom $p_1(x)$ van f. Schrijf dit in de vorm $p_1(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x)$, en geef de constanten a_0, a_1 en b_1.

Einde