Opgaven WC maandag 4 april

Opgave 0.1. Stel dat de temperatuur $T_0(x)$ op $t = 0$ een gaussische verdeling heeft met een maximum op $x = 0$ en breedte σ, dus

$$T_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x/\sigma)^2} .$$

a) Laat zien dat de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}T_0(\omega)$ van de beginverdeling gelijk is aan $\mathcal{F}T_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$. (Hint: zie opgave van vorige week.)

b) Wat is $\mathcal{F}T_t(\omega)$? Laat zien dat dit te schrijven valt als $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_t^2\omega^2}$, en geef de variantie σ_t^2 als functie van t.

c) Wat is het temperatuurprofiel $T(t, x)$ op tijdstip t? Laat zien dat dit inderdaad een oplossing van de warmtevergelijking is.

Opgave 0.2. De tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking voor een vrij deeltje op een lijn is

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_t(x) .$$

a) Als $\mathcal{F}\psi_0(\omega)$ de Fouriergetransformeerde van de toestand $\psi_0(x)$ op tijdstip $t = 0$ is, wat is dan de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}\psi_t(\omega)$ van de toestand op tijdstip t?

b) Stel dat het golfpakket op $t = 0$ gegeven wordt door $\psi_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x/\sigma)^2}$. Wat is dan $\psi_t(x)$?

   Hint: kijk nog eens goed naar de voorgaande opgave. De warmtevergelijking en de vrije Schrödingervergelijking zijn beide van de vorm

   $$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_t(x) ,$$

   met $\alpha = \frac{\kappa}{c\rho}$ voor de warmtevergelijking en $\alpha = \frac{i\hbar}{2m}$ voor de Schrödingervergelijking. (In zekere zin is de Schrödingervergelijking dus het imaginaire vriendje van de warmtevergelijking.) De oplossingsmethode in opgave 0.1 werkt voor beide waarden van α.