Opgaven WC donderdag 31 maart

Opgave 0.1. Bij deze opgave kun je gebruiken dat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$.

a) Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f(\omega)$ van de functie $f(x) = e^{-x^2/2}$. (Hint: substitueer $\tilde{x} = x + i\omega$.)

b) Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f_\mu(\omega)$ van $f_\mu(x) = e^{-(x-\mu)^2/2}$. (Hint: substitueer $\tilde{x} = x - \mu$.)

c) Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f_{\mu,\sigma}(\omega)$ van $f_{\mu,\sigma}(x) = e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$. (Hint: substitueer $\tilde{x} = (x - \mu)/\sigma$.)

d) Wat is dus de Fouriergetransformeerde van de Gaussische kansdichtheid

$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ?

Propositie 0.1. *Als $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absoluut integreerbaar is, dan is de Fouriergetransformeerde van de functie $f_\sigma(x) = f(x/\sigma)$ gelijk aan $\mathcal{F}f_\sigma(\omega) = \sigma\mathcal{F}f(\sigma\omega)$.*

Opgave 0.2. Bewijs de bovenstaande propositie. (Hint: gebruik de substitutie $\tilde{x} = x/\sigma$.)

Opgave 0.3. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(x) = 0$ voor $x < 0$, en $f(x) = e^{-ax}$ voor $x \geq 0$.

a) Schets de grafiek van f.

b) Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f(\omega)$.

c) Bekijk de Fourier inversieformule met goniometrische functies voor $f(c)$ en $f(-c)$. Laat zien dat

$$\int_0^\infty \frac{\cos(c\omega)}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-ac} \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\omega \sin(c\omega)}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-ac}.$$

Dit zijn de *integralen van Laplace.*