Werkcollege
Ma 21 maart
1/5

Opgave: a) H is hermitisch als $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, dus voor $1^e, 3^e$ matrix.

b) Eigenwaarden zijn

• $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \leadsto \lambda = 1$ of $\lambda = 2$ reëel!

• $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leadsto \det \begin{pmatrix} (\lambda-2) & -1 & 0 \\ 1 & (\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$

$= (\lambda - 3)\left((\lambda-2)^2 + 1\right) = 0$

$\lambda = 3$ of $\lambda = 2 \pm i$

• $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leadsto \det \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$

$= (\lambda - 3)\left((\lambda-2)^2 - 1\right) = 0$

$\lambda = 3$ of $\lambda = 2 \pm 1$;

$\lambda = 1$ of $\lambda = 3$ reëel!

c $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \leadsto \underbrace{\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\lambda=1}$ of $\underbrace{\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\lambda=2}$

met x_2 en x_3 vrij, x_1 vrij.

2/4

~~$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \quad \lambda = 1: \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ met x_3 vrij of~~

~~$\lambda = -1: \ \vec{v} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ met x_1 vrij of~~

~~$\lambda = 1: \ \vec{v} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met x_1 vrij~~

~~(ook $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is een eigenvector!)~~

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

bij $\lambda = 3$: $\vec{v} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

$\vec{v} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

bij $\lambda = 1$: $\vec{v} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Inderdaad zijn eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden orthogonaal.

i) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ orthogonale basis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Niet orthogonaal: krijg je door laatste twee vectoren te combineren, bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(laatste twee zijn nog steeds eigenvectoren!)

zelfde eigenwaarde!

Bij $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

Orthogonaal: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

niet-orthogonaal: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus weer eigenvector omdat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eigenwaarde 3 hebben)

Opgave: We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt}\psi_t = \frac{\partial^3}{\partial\phi^3}\psi_t ,$$

met $\psi_t(\phi)$ een 2π-periodieke functie van ϕ.

a) Schrijf deze vergelijking in de vorm

$$* \quad \frac{d}{dt}\psi_t = L\psi_t$$

voor een lineaire operator L.
De eigenvectoren van L zijn $\psi_k(\phi) = e^{ik\phi}$.
Wat zijn de eigenwaarden λ_k?

A: $L = \partial_\phi^3$, en $\partial_\phi^3 e^{ik\phi} = -ik^3 e^{ik\phi}$.
Dus $\partial_\phi^3 \psi_k = -ik^3\psi_k$.

Dus $\lambda_k = -ik^3$

b) Wat is de oplossing van $*$ met $\psi_0(\phi) = \psi_k(\phi)$?

A: $\psi_t(\phi) = e^{\lambda_k t}\psi_k(\phi) = e^{-ik^3t} e^{ik\phi}$

c) Geef de dispersierelatie voor ω_k als functie van k.
$\omega_k = i\lambda_k = k^3$. Er zijn drie ∂_ϕ-afgeleiden, i.p.v. twee.

d) als ψ_0 Fouriercoëfficiënten c_k heeft,
wat zijn dan de Fouriercoëfficiënten van ψ_t?

A: Als $\psi_0 = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\phi}$, dan is

$$\psi_t = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\left(c_k e^{-ik^3t}\right)\cdot e^{ik\phi}$$

Dus $c_k(t) = c_k e^{-ik^3t}$

e) Schrijf * als $\frac{d}{dt}\psi_t = -iH\psi_t$.

Is H hermitisch? Wat weet je dus over $\|\psi_t\|$

A: $H = iL = i\partial_\phi^3$ is inderdaad hermitisch, want dit is $-\frac{1}{\hbar^3}p^3$ voor de hermitische operator $p = i\hbar\partial_\phi$.

f) Gebruik de stelling van Parseval om $\|\psi_t\|^2$ uit te drukken in $\|\psi_0\|^2$

$$\|\psi_t\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_t(\phi)|^2 d\phi = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(t)|^2$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k e^{ik^3 t}|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|\psi_0\|^2.$$