Opgaven WC maandag 21 maart

Opgave 0.1. De operator $H\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ is van de vorm $H(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$.

a) Bepaal of H hermitisch is voor A gelijk aan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ en } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Wat zijn de eigenwaarden van deze drie matrices? Als H hermitisch is, controleer dan dat de eigenwaarden inderdaad reëel zijn. Bepaal de eigenvectoren van de matrices waarvoor H hermitisch is, en controleer dat eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden inderdaad orthogonaal zijn.

c) Elke hermitische operator heeft een orthogonale basis van eigenvectoren, maar dat wil niet altijd zeggen dat *elke* basis van eigenvectoren orthogonaal is. Geef voor de hermitische matrices zowel een basis van eigenvectoren die orthogonaal is, als een die dat niet is.

Opgave 0.2. We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(\phi) = \frac{\partial^3}{\partial \phi^3}\psi_t(\phi)\,,$$

met beginvoorwaarde $\psi_0(\phi)$. Hier is $\psi_t(\phi)$ een functie op de cirkel, en dus 2π-periodiek in de variabele ϕ.

a) Schrijf deze vergelijking in de vorm $\frac{d}{dt}\psi_t = L\psi_t$. De eigenvectoren van L zijn $\psi_k(\phi) = e^{-ik\phi}$ met k een geheel getal. Wat zijn de bijbehorende eigenwaarden λ_k van L?

b) Wat is de oplossing $\psi_k(\phi, t)$ bij beginvoorwaarde $\psi_k(\phi)$?

c) Geef de dispersierelatie, dat wil zeggen de frequentie $\omega_k = i\lambda_k$ als functie van het golfgetal k. Voor de Hamiltonoperator was deze kwadratisch in k. Waarom is dat nu niet meer zo?

d) Stel dat $\psi_0(\phi)$ Fouriercoëfficiënten c_k heeft. Wat zijn dan de coëfficiënten $c_k(t)$ in de Fourierexpansie

$$\psi_t(\phi) = \mathrm{lim}^{L^2}_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k(t) e^{ik\phi}$$

van de oplossing $\psi_t(\phi)$?

e) Schrijf de differentiaalvergelijking als $\frac{d}{dt}\psi_t = -iH\psi_t$. Is H hermitisch? Wat weet je nu dus over $\|\psi_t\|$?

f) Gebruik de Stelling van Parseval om $\|\psi_t\|$ uit te drukken in $\|\psi_0\|$.