Inleveropgaven 31 maart

Opgave 0.1. We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}x_t &= y_t\\ \tfrac{d}{dt}y_t &= -x_t\,.\end{aligned}$$

a) Schrijf dit in de vorm $\frac{d}{dt}\vec{v}_t = -iA\cdot\vec{v}_t$ voor een 2×2-matrix A. Is de operator $H(\vec{v}) = A\cdot\vec{v}$ hermitisch?

b) Los de differentiaalvergelijking op met reële beginvoorwaarden x_0 en y_0.

c) Als $x_0^2 + y_0^2 = R^2$, bereken dan $x_t^2 + y_t^2$. Wat valt je op?

Opgave 0.2. We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}x_1(t) &= && -0.42x_2(t) - 1.32x_3(t) - 7.62x_4(t)\\ \tfrac{d}{dt}x_2(t) &= 0.42x_1(t) && -4.21x_3(t) - 4.22x_4(t)\\ \tfrac{d}{dt}x_3(t) &= 1.32x_1(t) + 4.21x_2(t) && -3.17x_4(t)\\ \tfrac{d}{dt}x_4(t) &= 7.62x_1(t) + 4.22x_2(t) + 3.17x_3(t)\,.\end{aligned}$$

Stel dat de beginvoorwaarden $x_1(0),\ldots,x_4(0)$ reële getallen zijn, met $x_1^2(0) + \ldots + x_4^2(0) = R^2$. Wat is dan $x_1^2(t) + \ldots + x_4^2(t)$ op tijdstip t? (Tip: dit kan zonder te rekenen!)

Opgave 0.3. Voor een vast, reëel getal c_g bekijken we de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt}\psi_t(\phi) = -c_g\frac{d}{d\phi}\psi_t(\phi)\,,$$

met beginvoorwaarde $\psi_{t=0}(\phi) = \psi_0(\phi)$. Hier is $\psi_t(\phi)$ voor ieder tijdstip t een functie op de cirkel, en dus 2π-periodiek in de variabele ϕ.

a) Schrijf deze vergelijking in de vorm $\frac{d}{dt}\psi_t = L\psi_t$. De eigenvectoren van L zijn $\psi_k(\phi) = e^{-ik\phi}$ met k een geheel getal. Wat zijn de bijbehorende eigenwaarden λ_k van L? Geef de dispersierelatie, dat wil zeggen de frequentie $\omega_k = i\lambda_k$ als functie van het golfgetal k.

b) Laat zien dat de golfsnelheid $v_k = \omega_k/k$ niet afhangt van het golfgetal k.

c) Wat is de oplossing $\psi_k(\phi, t)$ bij beginvoorwaarde $\psi_k(\phi)$?

d) Stel dat de beginvoorwaarde $\psi_0(\phi)$ Fouriercoëfficiënten c_k heeft. Wat zijn dan de coëfficiënten $c_k(t)$ in de Fourierexpansie

$$\psi_t(\phi) = \lim^{L^2}_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N} c_k(t)e^{ik\phi}$$

van de oplossing $\psi_t(\phi)$?

Z.O.Z.

e) Schrijf $\psi_t(\phi)$ als functie van de variabele $(\phi - c_g t)$. Geef de oplossing $\psi_t(\phi)$ met beginvoorwaarde $\psi_0(\phi)$.

f) Schrijf de bovenstaande differentiaalvergelijking als $\frac{d}{dt}\psi_t = -iH(\psi_t)$. Is $H = iL$ hermitisch? Controleer dat $\|\psi_t\|^2$ inderdaad onafhankelijk is van t.

Opgave 0.4. De vectorruimte V van gladde, kwadratisch integreerbare functies $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ van drie variabelen x, y, z heeft inproduct

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_1}(x, y, z)\psi_2(x, y, z) dxdydz\,.$$

De Hamiltonoperator $H\colon V \to V$ is gegeven door

$$(H\psi)(x, y, z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x, y, z) + V(x, y, z)\psi(x, y, z).$$

Laat zien dat H hermitisch is. (Tip: laat zien dat de momenta $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$ en $p_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ hermitisch zijn, en gebruik Propositie 3.7.)