Opgave WC 14 maart (π-dag!)

1/6

Opgave: Rabi-Oscillaties

Stel dat ψ_{E_1} en ψ_{E_2} oplossingen zijn van de tijds onafh. Schrödinger vergelijking $H\psi_{E_1} = E_1\psi_{E_1}$, $H\psi_{E_2} = E_2\psi_{E_2}$.

~~Stel dat $\psi_{E_1} \perp \psi_{E_2}$~~

a) Wat zijn de fundamentele oplossingen van de tijds afh. Schrödinger vgl $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$ die horen bij de eigenvectoren ψ_{E_1} en ψ_{E_2}?

Antw: $\psi_t(x) = e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}\psi_{E_1}(x)$ en $\psi_t(x) = e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\psi_{E_2}(x)$

b) Wat is de oplossing met beginvoorwaarde $\psi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\psi_{E_1} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\psi_{E_2}$?

Antw: $\psi(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}\psi_{E_1} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\psi_{E_2}$

c) Stel dat de verwachtingswaarde van x in $\psi_{E_1}|_{t=0}$ en $\psi_{E_2}|_{t=0}$ nul is $\langle\psi_{E_1}, x\psi_{E_1}\rangle = \langle\psi_{E_2}, x\psi_{E_2}\rangle = 0$

Wat is de verwachtingswaarde van x in $\psi^t_{E_1}$ en $\psi^t_{E_2}$?

Antw: $\langle e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}\psi_{E_1}, x\, e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}\psi_{E_1}\rangle =$

$\underbrace{e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} \cdot e^{+\frac{iE_1t}{\hbar}}}_{=1} \langle\psi_{E_1}, x\psi_{E_1}\rangle = 0$

net zo: $\langle\psi^t_{E_2}, x\,\psi^t_{E_2}\rangle = 0$.

d) Als $\langle \psi_{E_1}, x\psi_{E_2} \rangle = \gamma$, laat zien dat dan $\langle \psi_{E_2}, x\psi_{E_1} \rangle = \overline{\gamma}$

opl: $\langle \psi_{E_2}, x\psi_{E_1} \rangle = \int \overline{\psi_{E_2}(x) \cdot x\psi_{E_1}(x)\, dx}$

$= \overline{\int \overline{\psi_{E_1}(x)} \cdot x\psi_{E_2}(x)\, dx} = \overline{\langle \psi_{E_1}, x\psi_{E_2} \rangle} = \overline{\gamma}$

e) Laat zien dat $L(\psi) = x\cdot\psi$ een lineaire afbeelding is.

opl: $x\cdot(\psi_1(x) + \psi_2(x)) = x\psi_1(x) + x\psi_2(x)$

$x\cdot(\lambda\psi_1)(x) = \lambda x\psi_1(x)$

f) Bereken de verwachtingswaarde $\langle \psi_0, x\psi_0 \rangle$

Hint: gebruik dat $\langle\ ,\ \rangle$ lineair is (met c.c. links) en dat x lineair is.

Druk je antwoord uit in γ

A: $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{E_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{E_2}, x\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{E_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{E_2}) \rangle =$

$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{E_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{E_2}, \frac{1}{\sqrt{2}}x\psi_{E_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}x\psi_{E_2} \rangle$ (x lineair!)

$= \frac{1}{2}\langle \psi_{E_1}, x\psi_{E_1} \rangle + \frac{1}{2}\langle \psi_{E_2}, x\psi_{E_2} \rangle$

$+ \frac{1}{2}\langle \psi_{E_1}, x\psi_{E_2} \rangle + \frac{1}{2}\langle \psi_{E_2}, x\psi_{E_1} \rangle$

$= 0 + 0 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\overline{\gamma} = \underline{\underline{\mathrm{Re}\,\gamma}}$

g) Bereken de verwachtingswaarde

$$\langle \psi_t , x \psi_t \rangle$$

→ als $\psi_{t=0} = \psi_{E_1}$

→ als $\psi_{t=0} = \psi_{E_2}$

→ als $\psi_{t=0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \psi_{E_1} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \psi_{E_2}$

A: $\psi_{E_1} \rightsquigarrow \psi_t = e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_{E_1}$

Dus $\langle e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_{E_1} , x\, e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_{E_1} \rangle =$

$$e^{+\frac{iE_1 t}{\hbar}} \cdot e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \cdot \langle \psi_{E_1} , x \psi_{E_1} \rangle$$

$$= 1 \cdot \langle \psi_{E_1} , x \psi_{E_1} \rangle = 0$$

Net zo voor ψ_{E_2}

Maar: $\langle \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \psi_{E_1} \cdot e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \psi_{E_2} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} , x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{E_1} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{E_2} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right) \rangle$

$$= \frac{1}{2} \langle \psi_{E_1} , x \psi_{E_1} \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi_{E_2} , x \psi_{E_2} \rangle$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot e^{+\frac{iE_1 t}{\hbar}} \cdot e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \langle \psi_{E_1} , x \psi_{E_2} \rangle$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \cdot e^{+\frac{iE_2 t}{\hbar}} \langle \psi_{E_2} , x \psi_{E_1} \rangle$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2} e^{-\frac{i(E_2 - E_1) t}{\hbar}} \gamma + \frac{1}{2} e^{\frac{i(E_2 - E_1) t}{\hbar}} \overline{\gamma}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\gamma \cdot e^{-\frac{i(E_2 - E_1) t}{\hbar}} \right)$$

4/6

h) Schrijf dit als $a \cos(\omega t)$ in het geval γ in $\mathbb{R}$.
Wat is de Rabi-frequentie ω ?

A: $$\langle \psi_{t,1}, x \psi_t \rangle = \gamma \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t \right)$$

dus $$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

i) In een waterstofatoom zijn de energie-niveaus

$$\cancel{E_n = -\frac{R}{n^2}, \text{ met } R = 1{,}097 \cdot 10^{7}\ m^{-1}}$$

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

met $R = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} = 2{,}175 \cdot 10^{-18}$ J (13,605 eV) de Rydberg-constante.

Als $\gamma \neq 0$, wat is dan de Rabi-frequentie voor oscillaties tussen E_1 en E_2 ?

A: $$E_2 - E_1 = R\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} R$$

Dus $$\omega = \frac{3}{4} \frac{R}{\hbar} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2{,}175 \cdot 10^{18}}{1{,}055 \cdot 10^{-34}} = 1{,}546 \cdot 10^{16}\ s^{-1}$$

Opgave: De oplossingen van de Quantum Harmonische Oscillator zijn $\psi_n(x) = h_n(x)\, e^{-x^2/4}$, met $h_n(x)$ de Hermite polynomen.

Ze voldoen aan $x\, h_n(x) - \frac{d}{dx} h_n(x) = h_{n+1}(x)$, en $h_0(x) = 1$

a)

$h_0(x) = 1$

$h_1(x) = x \cdot 1 - 0 = x$

$h_2(x) = x \cdot x - \frac{d}{dx} x = x^2 - 1$

$h_3(x) = x(x^2-1) - \frac{d}{dx}(x^2-1) = x^3 - x - 2x = x^3 - 3x$

$h_4(x) = x(x^3-3x) - \frac{d}{dx}(x^3-3x) =$

$x^4 - 3x^2 - 3x^2 + 3 = x^4 - 6x^2 + 3$

b)

Dit is zeker waar voor $h_0(x)$; 0 is even, dus $1 = x^0$.

~~Als h_n alleen even termen x^k bevat, dan bevat $x \cdot h_n$ alleen oneven term $x \cdot x^k = x^{k+1}$ ook $\frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1}$ een oneven term~~

Als h_n even is, dan is $x\, h_n(x)$ oneven, en $\frac{d}{dx} h_n(x)$ ook. Dus $h_{n+1}(x) = x\, h_n(x) - \frac{d}{dx} h_n(x)$ is oneven.

Als h_n oneven is, dan is $x \cdot h_n(x)$ even, en $\frac{d}{dx} h_n(x)$ ook. Dus $h_{n+1}(x) = x\, h_n(x) - \frac{d}{dx} h_n(x)$ is dan even.

Dus: h_0 even $\rightarrow$ h_1 oneven $\rightarrow$ h_2 even $\rightarrow$ h_3 oneven $\rightarrow$ etc.

c) $$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_n(x)} \cdot x\,\psi_m(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\,h_n(x)\,h_m(x)\,e^{-x^2/2}\,dx$$

Als $n-m$ even is, dan zijn n en m ófwel allebei even, ófwel allebei oneven.
De functies $h_n(x)$ en $h_m(x)$ zijn dus ófwel beide even, ófwel beide oneven.

Hun product $h_n(x) \cdot h_m(x)$ is dus in ieder geval even, zodat $x \cdot h_n(x)\,h_m(x)\,e^{-x^2/2}$ oneven is. De integraal γ is dus nul.

d) De amplitude van de Rabi-oscillaties is evenredig met γ. Er zijn dus géén Rabi-oscillaties tussen toestanden met $n-m$ even.

Je verwacht frequenties $\Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = (n-m)\,\omega$ met $(n-m)$ oneven, dus $(2k+1)\omega = \Omega$.

(tenzij er nog meer gevallen zijn waarin γ nul is natuurlijk...)