Do 17 mrt

1/3

Opgave: We bekijken de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking $i\hbar\, \partial_t \psi = H\psi$ met $H = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\partial_\phi^2$.

a) Voor welke k en E is $\psi_E(x) = \cos(k(\phi - \phi_0))$ een 2π-periodieke oplossing van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking $H\psi = E\psi_E$?

opl: De functie is periodiek als k geheel is, $k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$\partial_\phi \psi = -k \sin(k(\phi - \phi_0))$

$\partial_\phi^2 \psi = -k^2 \cos(k(\phi - \phi_0))$

Dus: $+\frac{k^2\hbar^2}{2mR^2}\cos(k(\phi-\phi_0)) = E\cos(k(\phi-\phi_0))$

$k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ en $E = \frac{+k^2\hbar^2}{2mR^2}$

b) Schrijf $\cos(k(\phi-\phi_0))$ als een lineaire combinatie $c_+\psi_k + c_-\psi_{-k}$, waar $\psi_k = e^{ik\phi}$ en $\psi_{-k} = e^{-ik\phi}$

opl: $\cos(k\phi - k\phi_0) = \frac{1}{2}\left(e^{ik\phi - ik\phi_0} + e^{-ik\phi + ik\phi_0}\right)$

$= \frac{e^{-ik\phi_0}}{2} \cdot \psi_k(\phi) + \frac{e^{ik\phi_0}}{2} \cdot \psi_k(\phi_0)$

c) Wat is de oplossing van $i\hbar\,\partial_t\psi = H\psi$ met $\psi_{t=0} = \cos(k(\phi - \phi_0))$?

A: $\psi_t(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi_E(x) = e^{-\frac{i\hbar k^2}{2mR^2}t}\cos(k(\phi-\phi_0))$,

omdat $\psi_E = \cos(k(\phi-\phi_0))$ eigenvector bij e.w. E is.

Alternatief: $\cos(k(\phi-\phi_0)) = \frac{1}{2}e^{-ik\phi_0}\psi_k + \frac{1}{2}e^{ik\phi_0}\psi_{-k}$

geeft $\psi_t = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E}e^{-ik\phi_0}\psi_k + \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E}e^{ik\phi_0}\psi_{-k} = e^{-\frac{i}{\hbar}E}\cos(k(\phi-\phi_0))$.

Opgave: Een deeltje met massa m beweegt vrij op het lijnstuk $0 \leq x \leq L$ van lengte L.
De Schrödingervergelijking is $i\hbar \partial_t \psi = H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \psi$,
met randvoorwaarden $\psi(0)=0$, $\psi(L)=0$.

a) Voor welke waarden van k en E is $\psi_E(x) = \sin(kx)$ een oplossing van $H\psi = E\psi$ met $\psi_E(0) = \psi_E(L) = 0$?
Waarom is $\psi(x) = \cos(kx)$ géén oplossing?

A: $H\psi_E = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot (-k^2 \sin(kx)) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \sin(kx)$,
dus voor $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

De randvoorwaarde $\psi_E(x)=0$ is altijd ok ($\sin(0)=0$),
en $\psi_E(L)=0$ als $\sin(kL)=0 \rightsquigarrow kL$ is een veelvoud van π. Dus $k = n\pi/L$,

en $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$

Voor $\cos(kx)$ geldt $\cos(0)=1$, voldoet niet aan randwaarden.

b) Wat is $\psi_t(x)$ als $\psi_0(x) = \sin(kx)$?

A: $\psi_t(x) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}\psi_E(x) = e^{-\frac{iE_k}{\hbar}t}\sin(kx)$

met $k = n\pi/L$

c) Wat is $W_E = \{\psi \mid H\psi = E\psi\}$?
Is het systeem gedegenereerd?

$W_{E_k} = \{ c\sin(kx) \mid c \in \mathbb{C} \}$ als $k = n\pi/L$

d) Vergelijk het deeltje op $0 \le x \le L$ met het deeltje op de cirkel met straal R.

Zijn de energieniveaus hetzelfde als $L = 2\pi R$?

lijn: $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$ cirkel: $E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}$, $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

als $L = 2\pi R$ $\;\Vert\;$ $\frac{\hbar^2 n^2}{8mR^2}$

niet hetzelfde, de lijn heeft een veel lagere (4×) grondenergie.

~~e) Schets de oplossingen voor de laagste twee energieniveaus voor de lijn en de cirkel.~~

e) Schets de grondtoestand en 1^e^ aangeslagen toestand van het deeltje op de lijn, en dan vergelijk dit met de grondtoestand van het deeltje op de cirkel.