Opgaven WC donderdag 17 maart

Opgave 0.1. We bekijken de Schrödingervergelijking van een deeltje met massa m dat vrij beweegt op de cirkel, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ met $H = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$. De golffunctie $\psi(\phi)$ is een 2π-periodieke functie van de hoekvariabele ϕ.

a) Voor welke k en E is $\psi_E(\phi) = \cos(k(\phi - \phi_0))$ een 2π-periodieke oplossing van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking $H\psi = E\psi$?

b) Schrijf $\psi_E(\phi) = \cos(k(\phi - \phi_0))$ als een lineaire combinatie $\psi_E(\phi) = c_+e^{ik\phi} + c_-e^{-ik\phi}$.

c) Wat is de oplossing van $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t = H\psi_t$ met $\psi_{t=0} = \cos(k(\phi - \phi_0))$?

Opgave 0.2 (Vrij deeltje op een lijnstuk)**.** Een deeltje met massa m beweegt vrij op een lijnstuk $0 \leq x \leq L$ van lengte L. De Schrödingervergelijking is hetzelfde als voor een deeltje op de cirkel, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ met $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. De randvoorwaarden worden nu echter gegeven door $\psi(0) = 0$ en $\psi(L) = 0$, omdat de kansdichtheid $|\psi(x)|^2$ nul is voor $x \leq 0$ en $x \geq L$.

a) Voor welke waarden van k en E is $\psi_E(x) = \sin(kx)$ een oplossing van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking $H\psi = E\psi$ met $\psi_E(0) = \psi_E(L) = 0$? Waarom werkt dit niet voor $\psi_E(x) = \cos(kx)$?

b) Wat is de oplossing $\psi_t(x)$ van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking met beginvoorwaarde $\psi_0(x) = \sin(kx)$?

c) Wat is de eigenruimte $W_E = \{\psi\,;\, H\psi = E\psi \text{ en } \psi(0) = \psi(L) = 0\}$ van H bij eigenwaarde E? Is het systeem gedegenereerd? (Vergelijk met de cirkel!)

d) Een vrij deeltje op een cirkel met straal R en een vrij deeltje op een lijnstuk van lengte $L = 2\pi R$ hebben evenveel ruimte tot hun beschikking. Een onbehoedzaam mens zou kunnen vermoeden dat het spectrum aan eigenwaarden E van de Hamiltonoperator in beide gevallen dus wel eens hetzelfde zou kunnen zijn. Is dit zo?

e Schets de stationaire golffunctie van het deeltje op de lijn voor de laagste drie energietoestanden. Doe hetzelfde voor de stationaire golffunctie $\psi_E(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_k}\sin(k\phi)$ voor het vrije deeltje op de cirkel. Vergelijk deze golffuncties en hun energieën.

De oplossingen van de Schrödingervergelijking kunnen dus heel anders uitvallen als je de randvoorwaarden verandert, terwijl de vergelijking *sec* hetzelfde blijft. Het is een gezond principe om een differentiaalvergelijking altijd in samenhang met haar randvoorwaarden te zien.