Opgaven WC maandag 14 maart

Stel dat ψ_{E_1} en ψ_{E_2} twee oplossingen zijn van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking $H\psi = E\psi$, met energie $E_1 < E_2$. De overgang van de grondtoestand ψ_{E_1} naar de aangeslagen toestand ψ_{E_2} is eigenlijk nooit instantaan. In de tussentijd zit het atoom in een overgangstoestand $\alpha\psi_{E_1} + \beta\psi_{E_2}$ tussen E_1 en E_2. Het vertoont dan *Rabi-oscillaties.* Dit is het onderwerp van dit werkcollege.

Opgave 0.1. Stel dat ψ_{E_1} en ψ_{E_2} twee oplossingen zijn van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking $H\psi = E\psi$, met energie $E_1 < E_2$.

a) Wat zijn de (fundamentele) oplossingen van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t = H(\psi_t) \tag{1}$$

die horen bij de eigenvectoren ψ_{E_1} en ψ_{E_2} van H?

b) Geef de oplossing ψ_t van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking (1) met beginvoorwaarde

$$\psi_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\psi_{E_1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\psi_{E_2} \tag{2}$$

op $t = 0$. Dit is *geen* oplossing van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking, en ze is dus niet stabiel; deze toestanden komen voor in de overgang van ψ_{E_1} naar ψ_{E_2}.

c) Als $\langle\psi_{E_1}, x\psi_{E_2}\rangle = \gamma$, laat dan zien dat $\langle\psi_{E_2}, x\psi_{E_1}\rangle = \overline{\gamma}$.

d) Laat zien dat $L(\psi) = x\psi$ (waar ψ een functie is van x) een lineaire afbeelding is.

e) Stel dat $\langle\psi_{E_1}, x\psi_{E_1}\rangle = 0$ en $\langle\psi_{E_2}, x\psi_{E_2}\rangle = 0$, d.w.z. de verwachtingswaarde van x in de orbitals ψ_{E_1} en ψ_{E_2} verdwijnt. Bereken de verwachtingswaarde $\langle\psi_0, x\psi_0\rangle$ van x in de toestand ψ_0 uit vergelijking (2). Druk je antwoord uit in γ.

f) Bereken de tijdsafhankelijke verwachtingswaarde $\langle\psi_t, x\psi_t\rangle$ van de positie x in de oplossingen ψ_t van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking met beginvoorwaarde ψ_{E_1} en ψ_{E_2} die je gevonden hebt in a). Doe hetzelfde voor de oplossing ψ_t met beginvoorwaarde ψ_0 die je gevonden hebt in b). Druk je antwoord uit in γ.

g) Stel dat γ een reëel getal is. Schrijf dan de verwachtingswaarde $\langle\psi_t, x\psi_t\rangle = a\cos(\Omega t)$ als een oscillatie. De frequentie Ω heet de *Rabi-frequentie.* Druk de frequentie Ω uit in E_1 en E_2, en druk de amplitude a uit in γ.

h) De energieniveaus van het waterstofatoom zijn $E_n = -R/n^2$, met $n = 1, 2, 3, \ldots$ en $R = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} = 2,175 \times 10^{-18} J$ de Rydbergconstante. Wat is de Rabifrequentie Ω voor oscillaties tussen de grondtoestand E_1 en de eerste aangeslagen toestand E_2?

Opgave 0.2. In herschaalde coördinaten $\tilde{x} = \alpha x$ zijn de (ongenormaliseerde) oplossingen van de quantum harmonische oscillator gegeven door

$$\psi_n(x) = h_n(x) e^{-\frac{1}{4}x^2} .$$

De Hermitepolynomen h_n voldoen aan de recursierelatie

$$h_{n+1}(x) = x h_n(x) - \tfrac{d}{dx} h_n(x) ,$$

met $h_0(x) = 1$.

a) Bereken $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$ en $h_4(x)$.

b) Laat zien dat $h_n(x)$ alleen termen x^k van even graad k bevat als n even is, en alleen termen van oneven graad k als n oneven is.

c) Laat zien dat $\gamma = \langle \psi_n, x\psi_m \rangle$ gelijk aan nul is voor $n - m$ even.

d) Wat betekent dit voor de Rabi-oscillaties tussen de energietoestanden $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ en $E_m = (m + \frac{1}{2})\hbar\omega$ van de harmonische oscillator?