Inleveropgaven maandag 21 maart

Lang niet alle differentiaalvergelijkingen zijn lineair. We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\tfrac{d}{dt}x(t) = x^2(t)\,. \tag{1}$$

Opgave 0.1. Laat zien dat de differentiaalvergelijking (1) niet lineair is.

a) Ga na dat de functie $x(t) = \frac{1}{c-t}$ een oplossing is van (1) voor elk getal c. Is het veelvoud $x(t) = \frac{\lambda}{c-t}$ ook een oplossing is van (1) voor elk getal λ?

b) De functies $x_1(t) = \frac{1}{c_1-t}$ en $x_2(t) = \frac{1}{c_2-t}$ zijn dus oplossingen van (1). Is hun som $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ook een oplossing van (1)?

c) Is de functie $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeven door $L(x) = x^2$, een lineaire afbeelding?

In de volgende opgave zijn de differentiaalvergelijkingen wel weer lineair.

Opgave 0.2. Stel dat een verbinding A zowel in B als in C vervalt, en dat ook B in C vervalt,

$$\begin{tikzcd} & C \\ A \arrow[ur, "k_{ac}"] \arrow[r, "k_{ab}"'] & B \arrow[u, "k_{bc}"'] \end{tikzcd}\,.$$

De vervalsconstanten k_{ab}, k_{bc} en k_{ac} zijn alle drie strikt positief, en voldoen aan $k_{ab}+k_{ac} \neq k_{bc}$. We berekenen het verloop van de concentraties van $[A]_t$, $[B_t]$, en $[C]_t$ als functie van de tijd, met als beginvoorwaarde dat op $t = 0$ alleen de stof A aanwezig is met concentratie a_0. Dus $[A]_{t=0} = a_0$, $[B]_{t=0} = 0$ en $[C]_{t=0} = 0$.

a) De concentraties $[A]_t$, $[B_t]$ en $[C]_t$ voldoen dan aan het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}[A]_t &= a[A]_t \\ \tfrac{d}{dt}[B]_t &= b[A]_t + c[B]_t \\ \tfrac{d}{dt}[C]_t &= d[B]_t + e[A_t]\,. \end{aligned}$$

Geef de constanten a, b, c, d en e in termen van k_{ab}, k_{bc} en k_{ac}.

b) Schrijf het stelsel vergelijkingen in matrixvorm $\frac{d}{dt}\vec{v}_t = A\vec{v}_t$, en geef de beginvoorwaarde $\vec{v}_{t=0}$.

c) Bereken de eigenwaarden λ_1, λ_2, λ_3 van A, en kies een basis $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ van eigenvectoren. Neem hierbij (en in het vervolg van de opgave) aan dat $k_{ab} = k_{bc} = k_{ac} = 1$.

d) Los de differentiaalvergelijking $\frac{d}{dt}\vec{v}_t = A\vec{v}_t$ op voor de juiste beginvoorwaarde $\vec{v}_0$. Geef $[A]_t$, $[B]_t$ en $[C]_t$.

e) Wat doen deze oplossingen voor $t = 0$ en $t \to \infty$?

De volgende tentamenopgave is het minst goed gemaakt. Probeer hem nogmaals te maken zonder naar de uitwerkingen te kijken.

Opgave 0.3. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met periode 2π is gegeven door $f(x) = e^{|x|}$ voor $-\pi \leq x < \pi$.

a) Schets de grafiek van f. (Minstens twee perioden.)

b) Bereken de Fouriercoëfficiënten c_k in de Fourierpolynomen

$$p_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

van f.

c) Geef het eerstegraads Fourierpolynoom $p_1(x)$ van f. Schrijf dit in de vorm $p_1(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$, en geef de constanten a_0, a_1 en b_1.