WC
Do 4 mrt

①/4

Stel A verwalt in B, en B verwalt in zowel C als D,

$$A \xrightarrow{k_{ab}} B \xrightarrow{k_{bc}} C, \qquad B \xrightarrow{k_{bd}} D$$

met $k_{ab} = k_{bc} = k_{bd} = 1$.

Op $t=0$ is $[A]_{t=0} = a$, en $[B]_{t=0} = [C]_{t=0} = [D]_{t=0} = 0$.

Bereken de concentraties van A, B, C en D als functie van de tijd.

a) Schrijf de ODE in matrixvorm, $\frac{d}{dt}\vec{V}_t = A \circ \vec{V}_t$.

$$\frac{d}{dt}[A]_t = -[A]_t$$
$$\frac{d}{dt}[B]_t = +[A]_t - [B]_t - [B]_t = [A]_t - 2[B]_t$$
$$\frac{d}{dt}[C]_t = [B]_t$$
$$\frac{d}{dt}[D]_t = [B]_t$$

met $v_t = ([A]_t, [B]_t, [C]_t, [D]_t)$ geeft dit

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \vec{V}_t$$

b) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

Het karakteristiek polynoom is

$$\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)$$

De eigenwaarden zijn de nulpunten:

$$\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

geeft $\lambda = 0$ (tweemaal), $\lambda = -1$, $\lambda = -2$

- Bij $\lambda = 0$ hebben we de eigenvectoren $A\vec{v} = 0$,

dus

$-1\,x_1 = 0 \leadsto x_1 = 0$

$x_1 - 2x_2 = 0 \leadsto x_1 = x_2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$ automatisch

Dus $\vec{v} = (0, 0, x_3, x_4)$ met x_3 en x_4 willekeurig.

- Bij $\lambda = -1$ hebben we $A\vec{v} = -\vec{v}$, dus

$-1\,x_1 = -1\,x_1 \leadsto$ automatisch

$x_1 - 2x_2 = -x_2 \leadsto x_1 = x_2$

$\left.\begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{array}\right\}$ $x_3 = -x_1$, $x_4 = -x_1$

Dus $\vec{v} = (x_1, x_1, -x_1, -x_1)$

met x_1 vrij

- Bij $\lambda = -2$ hebben we $A\vec{v} = -2\vec{v}$, dus

$-x_1 = -2x_1 \leadsto x_1 = 0$

$x_1 - 2x_2 = -2x_2 \leadsto$ automatisch

$\left.\begin{array}{l} x_2 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_4 \end{array}\right\}$ $x_3 = -\frac{1}{2}x_2$, $x_4 = -\frac{1}{2}x_2$

dus $\vec{v} = (0, x_2, -\frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_2)$

c) Kies een basis van eigenvectoren

Hier kunnen we de vrije parameters zelf kiezen.

3/4 Ik neem: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bij $\lambda = 0$

$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bij $\lambda = -1$

$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ bij $\lambda = -2$.

d) Schrijf de beginvoorwaarde $\vec{v}_0 = (a, 0, 0, 0)$ als lineaire combinatie van basisvectoren.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + c_3 \vec{b}_3 + c_4 \vec{b}_4$$

geeft
$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 + c_4 \\ c_1 - c_3 - 1/2\, c_4 \\ c_2 - c_3 - 1/2\, c_4 \end{pmatrix}$$

Dus $c_3 = a$, $c_4 = -a$, $c_1 = a/2$, $c_2 = a/2$

$$\vec{v}_0 = \frac{a}{2} \vec{b}_1 + \frac{a}{2} \vec{b}_2 + a \vec{b}_3 - a \vec{b}_4.$$

e) Wat zijn de fundamentele oplossingen, die bij de eigenvectoren horen?

$\vec{v}_1(t) = \vec{b}_1$, $v_2(t) = \vec{b}_2$, $\vec{v}_3(t) = e^{-t} \vec{b}_3$, $\vec{v}_4(t) = e^{-2t} \vec{b}_4$.

4/4 f) Geef de oplossing met beginwaarde $(a, 0, 0, 0)$ door deze te ontbinden in eigenvectoren. Wat zijn $[A]_t$, $[B]_t$, $[C]_t$, $[D]_t$?

Op $t = 0$ is $\vec{v}_0 = \frac{a}{2} e_1 + \frac{a}{2} e_2 + a e_3 - a e_4$,

thus $\vec{v}_t = \frac{a}{2} e_1 + \frac{a}{2} e_2 + a e^{-t} e_3 - a e^{-2t} \vec{e}_4$

$$\begin{pmatrix} [A]_t \\ [B]_t \\ [C]_t \\ [D]_t \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Dus
$$[A]_t = a e^{-t}$$
$$[B]_t = a\left(e^{-t} - e^{-2t} \right)$$
$$[C]_t = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} \right)$$
$$[D]_t = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} \right)$$

g) Schets de grafieken van $[A]_t$, $[B]_t$, $[C]_t$, $[D]_t$