Opgaven WC donderdag 10 maart

Opgave 0.1. Stel dat een stof A vervalt in B, en dat de stof B vervalt in zowel C als D,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & C \\ A \arrow[r, "k_{ab}"] & B \arrow[ur, "k_{bc}"] \arrow[dr, "k_{bd}"] & \\ & & D\,. \end{tikzcd}$$

De vervalsconstanten zijn $k_{ab} = k_{bc} = k_{bd} = 1$. De concentraties $[A]_t$, $[B_t]$, $[C]_t$ en $[D]_t$ voldoen dan aan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}[A]_t &= -[A]_t \\ \tfrac{d}{dt}[B]_t &= [A]_t - 2[B]_t \\ \tfrac{d}{dt}[C]_t &= [B]_t \\ \tfrac{d}{dt}[D]_t &= [B]_t\,. \end{aligned}$$

We berekenen het verloop van deze concentraties als functie van de tijd, met als beginvoorwaarde dat op $t = 0$ alleen de stof A aanwezig is met concentratie a_0. Dus $[A]_{t=0} = a_0$, $[B]_{t=0} = 0$, $[C]_{t=0} = 0$, en $[D]_{t=0} = 0$.

a) Schrijf het stelsel vergelijkingen in matrixvorm, $\frac{d}{dt}\vec{v}_t = A\vec{v}_t$. Wat is de beginvoorwaarde $\vec{v}_{t=0}$ voor de tijdsafhankelijke vector $\vec{v}_t$? Wat is de matrix A?

b) Bereken de eigenwaarden van A, en geef de bijbehorende eigenvectoren. (Let op, er is een eigenwaarde die twee eigenvectoren heeft.)

c) Kies een basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ van eigenvectoren van A.

d) Wat zijn de fundamentele oplossingen van de differentiaalvergelijking $\frac{d}{dt}\vec{v}_t = A\vec{v}_t$?

e) Schrijf de beginvoorwaarde $\vec{v}_{t=0}$ als een lineaire combinatie van eigenvectoren, $\vec{v}_0 = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3 + c_4\vec{b}_4$.

f) Geef de oplossing $\vec{v}_t$ met beginvoorwaarde $\vec{v}_0$. Wat zijn $[A]_t$, $[B]_t$, $[C]_t$ en $[D]_t$?