Opgaven WC maandag 29 februari

Opgave 0.1 (2+2+4+2 p)**.** De vector $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door $\vec{v} = (3, 4, 0)$. De vector $\vec{v}'$ is gegeven door $\vec{v}' = (1, 3, 2\sqrt{2})$.

a) Bereken de lengtes $\|\vec{v}\|$ en $\|\vec{v}'\|$ van beide vectoren. Wat is de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{v}'$?

b) Laat zien dat $W = \{a\vec{v} + b\vec{v}' \,;\, a, b \text{ in } \mathbb{R}\}$ een deelvectorruimte van $\mathbb{R}^3$ is.

c) Geef een orthogonale basis van W.

d) Geef de projectie van de vector $(0, 0, 9)$ op de deelvectorruimte W.

Opgave 0.2 (2+5+3 p)**.** We werken in de ruimte $\mathcal{L}^2([-1, 1])$ van kwadratisch integreerbare functies $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{C}$, met het gebruikelijke inproduct $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f}(x)g(x)dx$.

a) Laat zien dat $W = \{ax^{10} + bx^{11} + cx^{12} \,;\, a, b, c \text{ in } \mathbb{C}\}$ een deelvectorruimte van $\mathcal{L}^2([-1, 1])$ is.

b) Geef een orthogonale basis $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ van W.

c) Wat is de projectie op W van de functie $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{C}$ met $f(x) = x$?

Opgave 0.3 (1+6+3 p)**.** De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met periode 2π is gegeven door $f(x) = |x|$ voor $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, en $f(x) = \pi/2$ voor $\pi/2 < x \leq \pi$ en $-\pi < x < -\pi/2$.

a) Schets de grafiek van f. (Minstens twee perioden.)

b) Bepaal de coëfficiënten a_0, a_k en b_k waarvoor geldt:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Hint: wat kun je zonder te rekenen alvast zeggen over deze coëfficiënten?

c) Geef het Fourierpolynoom $p_2(x)$ van graad 2 waarvoor de kwadratische afstand

$$\|f - p_2\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p_2(x)|^2 dx$$

minimaal is. Geef de coëfficiënten c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1 en c_2 in

$$p_2(x) = \sum_{k=-2}^{2} c_k e^{ikx} = c_{-2}e^{-2ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix}\,.$$

Opgave 0.4 (8 + 2p)**.** De 2π-periodieke functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(x) = \pi^2 - x^2$ voor $-\pi \leq x < \pi$.

a) Bepaal de Fouriercoëfficiënten c_k van de functie f.

b) Met deze c_k hebben we dus $\pi^2 - x^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ voor alle $-\pi \leq x \leq \pi$. Gebruik deze formule voor $x = 0$ om de oneindige som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{25} + \ldots$$

uit te rekenen.