Werkcollegeopgaven donderdag 22 februari

Opgave 0.1 (Collapse of the wavefunction). Stel een electron heeft spintoestand $\psi = (\alpha, \beta)$ in $\mathbb{C}^2$. Dit wordt ook wel geschreven als $\psi = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$, met $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ de σ_z-eigentoestanden $|\uparrow\rangle = (1,0)$ en $|\downarrow\rangle = (0,1)$. We nemen aan dat ψ genormaliseerd is, $\|\psi\| = 1$.

a) Wat is de projectie $\vec{p}_1$ van ψ op de (complexe) lijn opgespannen door $|\uparrow\rangle$, dus op $\mathbb{C} \cdot |\uparrow\rangle = \{(\lambda, 0)\,;\, \lambda \text{ in } \mathbb{C}\}$? Wat is zijn projectie op $\mathbb{C} \cdot |\downarrow\rangle = \{(0, \lambda)\,;\, \lambda \,\text{in}\, \mathbb{C}\}$? Bereken $\|\vec{p}_1\|^2$ en $\|\vec{p}_2\|^2$. (Dit is de kans op $\sigma_z = 1$ of -1 bij toestand ψ.)

b) Wat is de projectie $\vec{p}_1{}'$ van $\vec{p}_1$ op ψ? Wat is de projectie $\vec{p}_2{}'$ van $\vec{p}_2$ op ψ? Bereken $\|\vec{p}_1{}'\|^2 + \|\vec{p}_2{}'\|^2$. (Dit is de kans dat het electron na een meting van σ_z nog steeds in de toestand ψ verkeert.) Maak een schets; neem hierbij aan dat α en β reëel zijn, en teken in $\mathbb{R}^2$ in plaats van $\mathbb{C}^2$.

Opgave 0.2 (Hermitepolynomen (I)). Zij V de complexe inproductruimte van functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2/2} dx < \infty$. Het inproduct op V is gedefiniëerd als

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(x) g(x) e^{-x^2/2} dx\,.$$

We orthogonaliseren de basispolynomen $b_k(x) = x^k$, dus $b_0 = 1$, $b_1 = x$, $b_2 = x^2$, enzovoorts. De resulterende orthogonale polynomen $h_0 = b_0'$, $h_1 = b_1'$, $h_2 = b_2' \ldots$ heten *Hermitepolynomen.*

a) Ga na dat dit inproduct aan I1 en I2 voldoet, en dat $\langle f, f\rangle \geq 0$.

b) Bereken de integraal $C_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2} dx$ voor elk natuurlijk getal k. (Hint: laat met partiële integratie zien dat $C_{k+1} = (2k-1)C_k$. Uit $C_0 = \sqrt{2\pi}$ kun je dus C_1 berekenen, dan C_2, enzovoorts.)

c) Laat zien dat $\langle b_m, b_n\rangle = 0$ als $m+n$ oneven is, en $\langle b_m, b_n\rangle = \frac{2^k k!}{(2k)!}$ als $m + n = 2k$ even is. De polynomen b_n zijn dus niet orthogonaal.

d) Orthogonaliseer de eerste 3 basisvectoren b_0, b_1 en b_2, en vind de eerste drie Hermite-polynomen h_0, h_1 en h_2.

Het tweede deel van de opgave over Hermitepolynomen is voor de liefhebbers: hij is wellicht wat moeilijker, maar evenredig interessanter. We vinden we een expliciete uitdrukking voor h_n.

Opgave 0.3 (Hermite polynomen (II)). Stel we hebben de Hermitepolynomen h_0 t/m h_n berekend. Deze zijn orthogonaal, en $h_k(x) = x^k +$ termen van orde $\leq k-1$. Definieer $H(x) = xh_n(x) - \frac{d}{dx}h_n(x)$. We laten zien dat $H = h_{n+1}$.

a) Laat zien dat $H(x) = x^{n+1} +$ termen van orde $\leq n$.

b) Laat zien dat H loodrecht staat op $h_0, \ldots h_n$. Hint: bekijk het inproduct $\langle H, h_m\rangle$ met $m \leq n$, en gebruik partiële integratie in de formule $\int_{-\infty}^{\infty} (xh_n(x) - \frac{d}{dx}h_n(x))h_m(x)e^{-x^2/2}$. Merk op dat $\frac{d}{dx}h_m(x)$ een polynoom van graad $m - 1 \leq n - 1$ is, en dus loodrecht staat op h_n.

c) Concludeer dat $H = h_{n+1}$. We hebben dus de recursierelatie

$$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - \tfrac{d}{dx}h_n(x)\,.$$

Definiëer de genererende functie

$$G(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)s^n/n!\,, \tag{1}$$

en laat zien dat $G(0,x) = 1$ en $\frac{\partial}{\partial s}G(s,x) = (x - \frac{\partial}{\partial x})G(s,x)$.

d) Controleer dat $G(s,x) = e^{sx-s^2/2}$ een oplossing is. (Had je deze ook zelf kunnen vinden?)

e) Bereken $\frac{\partial^n}{\partial s^n}|_{s=0}s^m$ voor $n \neq m$ en voor $n = m$. Kijk nog eens naar (1), en laat zien: $\frac{\partial^n}{\partial s^n}|_{s=0}G(s,x) = h_n(x)$. (Dit is waarom G de genererende functie heet.)

f) Laat zien: $h_n(x) = e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$.

g) Laat zien dat $\psi_n(x) = h_n(x)e^{-x^2/4}$ een orthogonaal stelsel is in de vectorruimte $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, met inproduct $\langle\psi,\psi'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi}(x)\psi'(x)dx$.