Opgaven WC maandag 15 februari

Opgave 0.1. Is de basis $\vec{b}_0 = (1,1,3)$, $\vec{b}_1 = (2,1,-1)$, $\vec{b}_2 = (-4,7,-1)$ van $\mathbb{R}^3$ orthogonaal? Is zij orthonormaal? Bepaal de basiscoëfficiënten λ_i van een vector $\vec{v} = (x,y,z)$.

Opgave 0.2. Maak van de basis $\vec{b}_i$ uit opgave 0.1 een ortho*normale* basis. (Deel hiervoor elke vector door zijn lengte, $\vec{b}_i' = \vec{b}_i/\|\vec{b}_i\|$.) Bereken de basiscoëfficienten λ_i' ten opzichte van $\vec{b}_i'$, en vergelijk ze met de coëfficiënten λ_i uit 0.1. Wat valt je op?

Opgave 0.3 (Legendrepolynomen). Voor een gegeven functie $f\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$, vind de coëfficiënten $a_0, \ldots, a_3$ zó dat het polynoom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ de functie f het best benadert, in de zin dat de kwadratische fout

$$\|f - p\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 dx$$

minimaal is. Druk je antwoord uit in de *momenten* $M_n = \int_{-1}^{1} x^n f(x) dx$ van f.

a) We werken in $\mathcal{L}^2([-1,1])$, de ruimte van functies $f\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ met inproduct $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f}(x) g(x) dx$. Bereken de inproducten tussen $b_0 = 1$, $b_1 = x$, $b_2 = x^2$ en $b_3 = x^3$. Orthogonaliseer dit stelsel, en geef een orthogonale basis $b_0', \ldots, b_3'$ van de deelruimte $W = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\,;\, a_i \in \mathbb{R}\}$.

b) Geef de basiscoëfficiënten ten opzichte van $b_0', \ldots, b_3'$ voor de projectie $P(f) = \lambda_0 b_0' + \ldots + \lambda_3 b_3'$ van f op W. (Druk uit in de momenten M_n van f.)

c) Druk $b_0', \ldots, b_3'$ uit in $b_0, \ldots, b_3$, en vind de basiscoëfficienten $a_0, \ldots, a_3$ van $P(f)$ ten opzichte van de (niet-orthogonale) basis $b_0, \ldots, b_3$. Druk $a_0, \ldots, a_3$ uit in M_0, M_1, M_2 en M_3.

d Stel $f(x) = 3 + 15x^2$, wat zou dan $a_0, \ldots, a_3$ moeten zijn? Bereken de momenten $M_0, \ldots, M_3$ van f, en controleer je uitdrukking voor $a_0, \ldots, a_3$.