wc 8 feb
1/3

Werkcollege 8 Februari (ma)

1.5 • $\theta = 0$: Dan $(\vec v, \vec v') = \|\vec v\| \cdot \|\vec v'\|$ 

(als vectoren parallel staan is het inproduct het product van hun lengten)

≥ 0

Als $\theta = 0$, dan $\vec v' = \lambda \vec v$, dus $\|\vec v'\| = \lambda \|\vec v\|$.

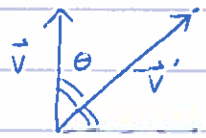
Dus $(\vec v, \vec v') = (\vec v, \lambda \vec v) = \lambda(\vec v\, \vec v) = \lambda \|v\|^2 = \|v\|\|v'\|$.

• $\theta = 90^\circ$: Dan $(\vec v, \vec v') = 0$.

Dat is Prop. 1.1, $\vec v \perp \vec v'$ impliceert $(\vec v\, \vec v') = 0$.

• Als $\theta = 180^\circ$ dan $(\vec v, \vec v') = -\|\vec v\|\|\vec v'\|$

Zelfde redenering als $\theta = 0$ maar dan $\vec v' = \lambda \vec v$ met $\lambda < 0$, dus $\|\vec v'\| = |\lambda|\|\vec v\| = -\lambda\|\vec v\|$.

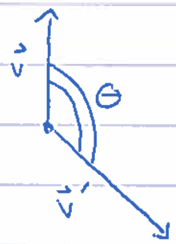
1.6 • 

$(\vec v\, \vec v') = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$\|\vec v\|^2 = (\vec v\, \vec v) = 1$

$\|v'\|^2 = (\vec v'\, \vec v') = 2$

Dus $\cos\theta = 1/\sqrt{2} \rightsquigarrow \theta = \operatorname{acos}(1/2) = \pi/4$ (45°)

• 

$(v\, v') = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$

$\|\vec v\|^2 = 1$

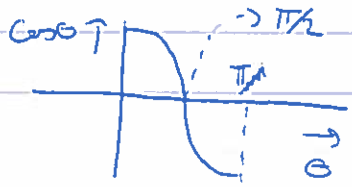
$\|\vec v'\|^2 = 2$

Dus $\cos\theta = -1/\sqrt{2} \rightsquigarrow \theta = \operatorname{acos}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3\pi/4$

(of 135°)

• aangezien $\|\vec v'\|$ en $\|\vec v\|$ niet-negatief zijn, is $(\vec v\, \vec v') \geq 0$ (of ≤ 0) als $\cos\theta \geq 0$ (of ≤ 0)

Dit is precies zo als $\theta \leq \pi/2$ (90°) (of $\theta \geq \pi/2$ 90°)



wc 8 feb
2/3

1.7 · $(v\,v') = 4\cdot(-3) + 2\cdot 3 + 6\cdot 1 = -12+6+6 = 0$,
dus $\vec{v} \perp \vec{v}'$ (de hoek is $90°$, $\pi/2$)

· $(4\;2\;7) = (4\;2\;6) + (0\;0\;1)$,
dus $$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right) = \underbrace{\left(\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right)}_{=1} = 1.$$
Dit is ≥ 1, dus de hoek is scherp

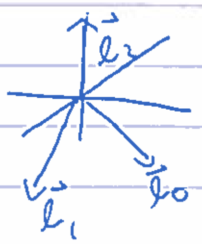
1.9 b We willen een willekeurige vector
$\vec{v} = (x,y,z)$ schrijven als $\vec{v} = \lambda_0\vec{e}_0 + \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$.
(als dit eenduidig kan heb je een basis voor $\mathbb{R}^3$, anders niet.)

Kies: $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_0\\0\\-\lambda_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\lambda_1\\-\lambda_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\\\lambda_2-\lambda_0-\lambda_1\end{pmatrix}$$

Dus $\lambda_0 = x$, $\lambda_1 = y$ en $\lambda_2 - \lambda_0 - \lambda_1 = z$
$\Leftrightarrow$
$\lambda_2 - x - y = z$
$\Leftrightarrow$
$\lambda_2 = z + x + y$.

Iedere vector $\vec{v}$ kan dus geschreven worden als $\vec{v} = \lambda_0\vec{e}_0 + \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$
met $\lambda_0 = x$, $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = z+x+y$.

Schets:



Als je de zaak niet vertrouwt kun je controleren:

$$x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + (x+y+z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}x+0+0\\0+y+0\\-x+-y+(x+y+z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
Zoals voorspeld.

1.10 Er geldt $\vec{e}_1' \perp \vec{e}_0$ als $(\vec{e}_1', \vec{e}_0) = 0$, dus als

$$0 = (\vec{e}_1 - \alpha \vec{e}_0, \vec{e}_0) = (\vec{e}_1, \vec{e}_0) - \alpha (\vec{e}_0, \vec{e}_0).$$

Nu is $(\vec{e}_1, \vec{e}_0) = -3/5$, $(\vec{e}_0, \vec{e}_0) = \frac{1}{25}(4^2 + (-3)^2) = 1$.

Dus $\vec{e}_1' \perp \vec{e}_0$ als $-3/5 - \alpha = 0$,

dus als $\alpha = -3/5$