Opgaven WC donderdag 11 februari

Opgave 0.1. Controleer dat $\vec{b}_0 = (1, -1, 0)$, $\vec{b}_1 = (1, 1, 1)$, en $\vec{b}_2 = (1, 1, -2)$ een orthogonale basis is. Loop het bewijs van Propositie 1.4 na voor de vector $\vec{v} = (1, 0, 0)$. Wat zijn de basiscoëfficienten λ_0, λ_1 en λ_2? Neem de proef op de som door $\lambda_0\vec{b}_0 + \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2$ te berekenen.

Opgave 0.2. Zij $\vec{v}$ de vector $\vec{v} = (1, i)$ in $\mathbb{C}^2$. Bereken $i\vec{v}$, $2i\vec{v}$, en $(1 + 2i)\vec{v}$.

Opgave 0.3. Bereken $(1 - i)\vec{v} + \vec{v}'$ voor $\vec{v} = (1, 1 + i, i)$, $\vec{v}' = (i, 1, 2 - i)$ in $\mathbb{C}^3$.

Opgave 0.4. Stel $V \subseteq \mathbb{R}^5$ is de verzameling van vectoren $\vec{v} = (x_0, \ldots, x_4)$ met $x_0 + \ldots + x_4 = 0$.

a) Waarom is V een deelvectorruimte van $\mathbb{R}^5$?

b) Laat zien dat $\vec{b}_0 = (1, -1, 0, 0, 0)$, $\vec{b}_1 = (0, 1, -1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (0, 0, 1, -1, 0)$, $\vec{b}_3 = (0, 0, 0, 1, -1)$ een basis is van V.

c) Orthogonaliseer deze basis.

Opgave 0.5. Bereken $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle$ voor:

a) $\vec{v} = (1, -i)$ en $\vec{v}' = (1, i)$

b) $\vec{v} = (1, i)$ en $\vec{v}' = (1, i)$

c) $\vec{v} = (1, -i)$ en $\vec{v}' = (1, -i)$

Opgave 0.6. Als $\vec{v} = (z_0, z_1)$ en $\vec{v}' = (z_0', z_1')$ vectoren in $\mathbb{C}^2$ zijn, en $\lambda = i$, ga na dat $\langle \vec{v}, \lambda\vec{v}' \rangle = \lambda\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle$ $\langle \lambda\vec{v}, \vec{v}' \rangle = \overline{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle$.

Opgaven 0.7, 0.8, 0.9 en 0.10 horen bij elkaar, en vormen de opmaat voor Fouriertheorie. Zorg dat je in elk geval 0.7 en 0.8 maakt.

Opgave 0.7. De vectoren $\vec{b}_0$ en $\vec{b}_1$ in $\mathbb{C}^2$ zijn gegeven door $\vec{b}_0 = (1, 1)$ en $\vec{b}_1 = (1, -1)$. Bepaal $\langle \vec{b}_0, \vec{b}_0 \rangle$, $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle$ en $\langle \vec{b}_0, \vec{b}_1 \rangle$.

Opgave 0.8. Zij $\omega = e^{2\pi i/3} = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i)$.

a) Wat is ω^2, ω^3, ω^4, enzovoorts? Wat is ω^{-1}, ω^{-2}, $\omega^{-3}, \omega^{-4}, \ldots$? Wat is $\overline{\omega}, \overline{\omega}^2, \overline{\omega}^3, \overline{\omega}^4, \ldots$? Maak een plaatje in het complexe vlak.

b) De vectoren $\vec{b}_0$, $\vec{b}_1$ en $\vec{b}_2$ in $\mathbb{C}^3$ zijn gegeven door en $\vec{b}_0 = (1, 1, 1)$, $\vec{b}_1 = (1, \omega, \omega^2)$, en $\vec{b}_2 = (1, \omega^2, \omega^4) = (1, \omega^2, \omega)$. Bepaal de inproducten $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle$ tussen al deze vectoren.

Opgave 0.9. De vectoren $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ in $\mathbb{C}^4$ zijn gegeven door $\vec{b}_0 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b}_1 = (1, i, i^2, i^3)$, $\vec{b}_2 = (1, i^2, i^4, i^6) = (1, -1, 1, -1)$, en $\vec{b}_3 = (1, i^3, i^6, i^9) = (1, -i, -1, i)$. Bepaal de inproducten $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle$ tussen al deze vectoren.

Opgave 0.10. Kijk nog eens naar Opgave 0.7, 0.8 en 0.9. Zie je de overeenkomsten? (Hint: $e^{2\pi i/2} = -1$, $e^{2\pi i/3} = \omega$, $e^{2\pi i/4} = i$.) Kies je favoriete getal $n > 4$, formuleer de bijbehorende opgave, en raad het antwoord.