

## Gruppen und platonische Körper

VORTRÄGE: DO 10:15–11:45, GEOM 432  
SPRECHSTUNDEN: MI 16:00–18:00, GEOM 340

Die Lernziele und -methoden dieses Proseminars sind:

- A) Verständnis der mathematischen Inhalte durch Selbststudium: Sie bilden Teams zu je drei (oder zwei) Studierenden. Sie bekommen dann ein Projektthema, das Sie gemeinsam schriftlich ausarbeiten nachdem Sie sich damit gründlich befasst haben.
- B) Präsentation des angeeigneten Wissens: Sie geben gemeinsam über das Thema einen Vortrag, bei dem Sie sich an den Interessen und Vorkenntnissen Ihrer Mitstudenten orientieren. Dies passiert in zwei 90-minütigen Sitzungen. Höchstens 75 Minuten der verfügbaren Zeit sollten pro Sitzung für die Präsentation (inkl. gegebenenfalls vorgesehener praktischer Arbeitsphasen) verplant werden. Die verbleibende Zeit ist für abschließende Kommentare und Feedback durch die Proseminarteilnehmer gedacht.
- C) Verständnis der mathematischen Inhalte durch zuhören der Präsentationen ihrer Kommilitonen.

Diese drei Lernziele sind natürlich nicht voneinander unabhängig! Achten Sie darauf, dass Sie das, worüber Sie referieren wollen, wirklich verstanden haben. Seien Sie in diesem Punkt sehr kritisch, da man Dinge, die man selber nicht durchdrungen hat, auch nicht richtig erklären kann. In anderen Worten: Es gilt  $\neg A \Rightarrow \neg B$ .

Offensichtlich gilt auch  $\neg B \Rightarrow \neg C$ : Versuchen Sie also ein Referat zu halten das möglichst klar und interessant ist, denn nur dadurch kann ein Vortrag effektiv sein.

Wie aus der symbolischen Logik bekannt, sind die Aussagen  $\neg A \Rightarrow \neg B$  und  $\neg B \Rightarrow \neg C$  durchaus nicht äquivalent zu  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow C$ . Geben Sie sich also die Mühe die Präsentationen ihrer Kommilitonen zu verstehen, auch wenn Sie Ihren eigenen Vortrag schon gehalten haben. Wenn Sie etwas nicht verstehen, sollen Sie nachfragen!

# 1 Leitfaden zur Seminargestaltung

Zur Erreichung obenstehender Lernziele sind alle Friedlichen Mittel erlaubt, insbesondere sind Sie völlig frei in der Gestaltung Ihrer Seminarsitzung. Die folgenden Bemerkungen sind nur ein Leitfaden um diese Ziele zu erreichen.

## 1.1 Tipps zu den Vorträgen

Sie geben mit Ihrem Team zwei Vorträge von (höchstens) 75 Minuten. Bei diesen Vorträgen sollten Sie Ihren Mitstudenten über das Thema, mit dem Sie sich befasst haben, erzählen.

### **Freiheit ist für alle da**

Sie sind völlig frei in der Gestaltung der Seminarsitzung: Sie können Overhead-Projektor, Beamer und Tafel benutzen, Poster o.ä. mitbringen, Ihren Zuhörern im Vortragsstil berichten, sie zur Gruppenarbeit animieren, ihnen Einzelaufträge geben, eine kurze Pause machen, etc. Es empfiehlt sich die Ausgabe eines Handouts, in dem die wichtigsten Begriffe der Sitzung erläutert sind. Vielleicht behalten Sie als Leitidee im Kopf, die Präsentation Ihres Themas im Stil einer Lehrprobe durchzuführen.

### **Was du nicht willst, dass man dir tu', das füg' auch keinem anderen zu**

Oder prosaischer formuliert: Orientieren Sie sich bei Ihrer Ausarbeitung und Ihrem Referat an Ihren Mitstudierenden und versuchen Sie einen Vortrag zu gestalten, den Sie selber als Zuschauer am ehesten verstehen und interessant finden würden. In dem Moment, wo Sie den Vortrag halten, haben Sie sich schon lange Zeit intensiv mit ihrem Thema beschäftigt. Rechnen Sie damit, dass das für Ihr Publikum nicht der Fall sein wird, und berücksichtigen Sie die Vorkenntnisse Ihrer Mitstudierenden. Lassen Sie z.B. Ihrem Publikum die Zeit um neue Definitionen zu verdauen, und entscheiden Sie bewußt ob Sie Sätze mittels eines Beweises oder/und mithilfe von einigen klaren Beispielen erläutern wollen.

Versuchen Sie andererseits auch als Zuhörer aktiv die Vorträge ihrer Mitstudierenden zu verstehen, und stellen Sie unbedingt Fragen wenn Sie etwas nicht verstehen. Sollten Sie dies nicht aus Interesse an Gruppen und platonischen Körpern machen (kaum vorstellbar!), machen Sie es dann wenigstens aus Höflichkeit gegenüber Ihren Mitstudierenden.

### **In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister...**

Es gibt nie genug Zeit um alles zu erzählen, was man zu erzählen hat. Treffen Sie also bei Ihrem Vortrag eine klare Wahl welche Themen Sie bei Ihrem Vortrag ausgiebig behandeln wollen, welche Themen Sie nur kurz andeuten wollen und welche Themen Sie übergehen. Seien Sie dabei nicht demokratisch! Nicht alle Themen sind gleich wichtig und es ist am Sprecher die Prioritäten festzulegen.

### **Eine leichte Übung**

Jedes Team sollte seine Präsentation - idealerweise im Beisein eines anderen Teams - einmal proben, um die Verständlichkeit und die Einhaltung der Zeitbeschränkung zu testen.

## **1.2 Tipps zu der Ausarbeitung**

Eine schriftliche Ausarbeitung zum Thema muss **spätestens 2 Wochen vor dem Präsentationstermin** abgegeben werden. Die Ausarbeitung sollte wesentlich detaillierter als der Vortrag sein. Sie sollte Lehrern eine Hilfe bei der Behandlung ähnlicher Themen in der Schule sein können.

### **Länge**

Die Ausarbeitung soll genau so lang wie nötig sein. Üblicherweise haben Ausarbeitungen eine Länge von etwa 10 Seiten, sehen Sie diese Zahl aber als nicht mehr als eine Richtlinie.

### **Deutsch**

Rechtschreib- und Grammatikfehler stören den Leser und lenken ihn ab von den Inhalten Ihrer Ausarbeitung. Achten Sie also besonders auf die korrekte sprachliche Form; dies bezieht sich gleichermaßen auf die mathematischen und auf die reinen Textteile. Da die Muttersprache des Dozenten nicht die deutsche ist, kann er Ihnen nicht durch Korrektur Ihrer Arbeit helfen. Es empfiehlt sich also dringend, die Ausarbeitung vorher bereits von einem anderen Seminarteam gegenlesen zu lassen.

## Quellen

Orientieren Sie sich an Lehrbüchern oder Skripten Ihrer Wahl. Denken Sie daran, alle verwendeten Quellen (Bücher, Internetseiten, etc.) in ein Verzeichnis am Ende der Arbeit aufzunehmen (Quellenverzeichnis). Die Ausarbeitung muss, anders als Ihnen das aus den erziehungswissenschaftlichen Fächern vielleicht vertraut ist, keine Ausführungen zur Wahl des Proseminars und keine Schlussbemerkung enthalten. Sie brauchen einzelne Definitionen und Sätze auch nicht zu zitieren, sondern dürfen Sie einfach nochmal „neu“ formulieren.

## Software

Was die Software betrifft, mit der Sie Ihre Ausarbeitung anfertigen, haben Sie prinzipiell freie Wahl. Die Erfahrung hat aber mehrfach und deutlich gezeigt, dass eine Ausarbeitung mit MS Word - sofern geeignete Formeditoren nicht zur Verfügung stehen - sehr mühsam werden kann. Ich möchte Sie ermutigen, sich in das (kostenlose) Softwarepaket  $\text{\LaTeX}$  einzuarbeiten, mit dem zum Beispiel dieser Text (und vermutlich die meisten Ihrer Lehrbücher) geschrieben wurde(n). Nähere Informationen finden Sie beispielsweise unter

<http://de.wikipedia.org/wiki/LaTeX>.

Es gibt aber auch eine ganze Reihe von Internetseiten, auf denen nicht nur das Programmpaket und dessen Installation beschrieben werden, sondern auch ein Download der Software möglich ist. Googlen Sie einfach ein bisschen zu den Stichworten  $\text{\LaTeX}$  und  $\text{\MikTeX}$ .

Einige Empfehlungen:

- <http://www.grundstudium.info/latex/>
- <http://www.dante.de/>
- <http://www.matheraetsel.de/miktex.html>
- <http://mirrors.ctan.org/info/lshort/german/l2kurz.pdf>

Die Einarbeitung in das Programm erfordert ein bisschen Zeit (ungefähr einen Tag), aber das Setzen eines mathematischen Textes mit  $\text{\LaTeX}$  ist unvergleichlich viel einfacher als mit den herkömmlichen Textverarbeitungsprogrammen. Wenn Sie jetzt einen Tag in das Kennenlernen von  $\text{\LaTeX}$  investieren, werden Sie sich im Laufe ihres mathematischen Lebens sehr viel Zeit (und Ärger) sparen.

## **1.3 Sonstiges**

Einige praktische Bemerkungen.

### **1.3.1 Arbeitsaufwand**

Das Proseminar wird nach ECTS mit 4 Leistungspunkten bewertet werden. Erwartet wird daher - über die Anwesenheit im Seminar hinaus - ein zeitlicher Einsatz von etwa 90 Stunden für die Vorbereitung, Nachbereitung und Ausarbeitung des Projekts. Bedenken Sie, dass 90 Stunden einem gut 2-wöchigen Vollzeiteinsatz (à 40 Stunden pro Woche) entsprechen! (Die Themen sind so konzipiert, dass Sie einen derartigen Arbeitsaufwand tatsächlich benötigen, um sie erschöpfend auszuarbeiten.) Einen Großteil der Arbeit müssen Sie **vor** dem Vortrag leisten - nutzen Sie hierzu die Zeit in den Semesterferien.

### **1.3.2 Anwesenheitspflicht**

Im Proseminar besteht Anwesenheitspflicht. Sie sollten nicht mehr als zweimal fehlen (in Krankheitsfällen können Ausnahmeregelungen gefunden werden) und mich gegebenenfalls im Vorhinein über Ihr Fernbleiben vom Proseminar per E-Mail benachrichtigen. Dies ist insbesondere dann besonders wichtig, wenn Ihre eigene Präsentation krankheitsbedingt nicht stattfinden kann. Da wir einen engen Terminkalender haben, müssen wir in diesen Fällen Vortragstermine evtl. tauschen. Stellen Sie sich also darauf ein, dass Ihr anberaumter Vortragstermin um ein bis zwei Wochen vorverlegt werden kann!

### **1.3.3 Hardware**

Falls Sie für Ihre Präsentation irgendwelche Hardware (Beamer, Kabel, Fernsteuerung, Overheadprojektor etc.) benötigen, kümmern Sie sich frühzeitig darum, dass diese Dinge zur Sitzung zur Verfügung stehen. Nach Absprache kann ich Sie bei der Beschaffung notwendiger Materialien unterstützen.

### **1.3.4 Sprechstunden**

Wenn Sie Fragen haben, sind Sie immer willkommen in den Sprechstunden!

## 2 Projekte

Entscheiden Sie mit Ihrem Team welche der folgenden Projekte euch am meisten interessieren. Wenn verschiedene Teams dasselbe Projekt bevorzugen, wird die Entscheidung mithilfe eines platonischen Körpers getroffen.<sup>1</sup>

### **Projekt A: Gruppen und Untergruppen**

Was ist eine Gruppe?  
Was sind Diedergruppen?  
Was ist eine Untergruppe?  
Was sind Erzeuger?

#### *Literatur*

[2] Ch. 1,2,4,5  
[1] Kapitel 3.7  
[4] Kapitel 1.1  
[3] Kapitel 1, §1.1, §1.6, §1.7, §3.6, §5.1

### **Projekt B: Platonische Körper**

Welche platonischen Körper gibt es?  
Warum nur diese fünf?

#### *Literatur*

[1] Kapitel 2.5  
[3] Anhang

### **Projekt C: Symmetrische Gruppen und platonische Körper**

Was sind symmetrischen und alternierenden Gruppen?  
Was sind die Symmetriegruppen der platonischen Körper?

---

<sup>1</sup>Normalerweise benutzt man zu diesem Zweck einen Würfel. Ist dies auch möglich wenn 5 Teams sich für das gleiche Projekt interessieren? Gibt es in diesem Fall platonische Körper, die man statt Würfeln benutzen kann? Und im Fall, dass 7 Teams sich für das gleiche Projekt interessieren?

*Literatur*

[2] Ch. 1,6,8

[1] Kapitel 3.8

[4] Kapitel 4.3

[3] Kapitel 1, §1.9, §2.1, §4.5, §4.6, §5.1, §5.2, §5.3, §5.4, §5.6

**Projekt D: Ähnlichkeit in der Welt der Gruppen**

Was sind Homomorphismen zwischen Gruppen?

Wann sind zwei Gruppen isomorph?

Wann sind zwei Elemente einer Gruppe konjugiert?

Illustrieren Sie was „konjugiert“ bedeutet anhand der Drehgruppe  $SO(3)$ .

*Literatur*

[2] Ch. 7,16,9,14

[1] Kapitel 3

[4] Kapitel 1.2

[3] Kapitel 1, §2.1, §2.2, §4.2

**Projekt E: Aufteilen von Mengen**

Was hatte Joseph-Louis Lagrange über Untergruppen zu sagen?

Was sind Partitionen?

Was sind Nebenklassen?

*Literatur*

[2] Ch. 11,12

[4] Kapitel 1.1

[3] Kapitel 1, §2.3, §2.4

**Projekt F: Operationen von Gruppen**

Wie lässt sich die Operation einer Gruppe mathematisch beschreiben?

Was sind Bahnen und Stabilisatoren?

Die Länge jeder Bahn ist ein Teiler der Gruppenordnung.

Beweisen Sie das Lemma von Burnside<sup>2</sup>.

Warum fixieren konjugierte Gruppenelemente gleich große Mengen?

*Literatur*

[2] Ch. 17,18

[4] Kapitel 3.1

[3] Kapitel 1, §4.1, §4.3

### **Projekt G: Endliche Drehgruppen**

Welche endlichen Drehgruppen gibt es?

Und was hat das mit platonischen Körpern zu tun?

*Literatur*

[2] Ch. 19

[1] Kapitel 3.8

[3] Kapitel 1, §5.7

## **3 Bemerkungen zur Literatur**

Im Folgenden finden Sie einige Literatur zu den obigen Themen. Fühlen Sie sich aber frei selbst Literatur zu Ihren Themen zu suchen, wenn Sie das bevorzugen.

Grundsätzlich folgen wir [2], mit ab und zu einen Spaziergang durch [1] wenn Geometrie und Gruppentheorie einander nähern. Das Buch [3] ist auf Deutsch geschrieben, sehr zugänglich, und enthält größtenteils die gleiche Information wie das englische Buch [2]. Das Buch [4] enthält hilfreiche Informationen, der Stil ist aber eher gedrängt als kurzweilig. Als Grundtext würde ich es nicht empfehlen, eher als Beilage.

Wenn Sie selbstständig im weltweiten Netz Informationen suchen wollen, achten Sie dann bitte besonders sorgfältig auf die Herkunft und den Inhalt der Darstellung!

---

<sup>2</sup>Satz 18.1 in [2], auch bekannt als „das Lemma von Cauchy-Frobenius“, „The Counting Theorem“ und sogar als „The Lemma That Is Not Burnside’s“. (Innerhalb der Mathematik ist es äußerst ungewöhnlich, dass ein Satz den Namen seiner wirklichen Entdecker trägt. Diese Aussage ist ungerechterweise bekannt unter den Namen „der Satz von Wepster“.

## Literatur

- [1] I. AGRICOLA UND T. FRIEDRICH: Elementargeometrie, Vieweg (2005)
- [2] M. A. ARMSTRONG: Groups and Symmetry, Springer (1988)
- [3] G. FISCHER: Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Vieweg+Teubner (2011)
- [4] KURZWEIL UND STELLMACHER: Theorie der endlichen Gruppen, Springer (1998)